Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato

Sábado 24 de mayo | CIMAT Guanajuato

Cuarto Examen Selectivo

Instrucciones:

- Este examen servirá para seleccionar a los alumnos más destacados de entre los competidores actuales para el proceso de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2025. También servirá para elegir a las alumnas que nos representarán en el concurso nacional femenil 2025.
- El examen comienza a las 10 am y concluye a las 2 pm.
- Para este examen puedes usar hojas blancas, lapices, plumas, regla, compás y lo que necesites del juego de geometría. Pero no puedes hacer uso de internet, dispositivos electrónicos, notas, libros ni inteligencia artificial.
- Cada problema vale 7 puntos. Todos los problemas son de justificación. Se darán puntos parciales de acuerdo al avance mostrado de la solución. Coloca en las hojas de solución tus procedimientos, operaciones, deducciones, resultados y/o argumentos que consigas. Utiliza ejemplos, diagramas, dibujos, tablas y lo que te ayude a expresar, explicar y sustentar tus argumentos.
- Los alumnos y alumnas ganadores de este examen serán publicados el lunes 26 de mayo por la tarde en

https://ommgto.cimat.mx

Problema 1.
Demuestra que existen una infinidad de ternas de primos (p, q, r) tales que

$$2008 \mid pqr + p - (pq + pr)$$

Nota: Una terna (a, b, c) de números son tres números donde el orden importa. Por ejemplo la terna $(2, 11, 7)$ es diferente a la terna $(11, 2, 7)$. Dos ternas (a, b, c) y (x, y, z) se consideran distintas si $a \neq x$ o $b \neq y$ o $c \neq z$.

Problema 2.
Sea ABC un triángulo con $AB = 4$ unidades y $AC = 5$ unidades. Llamemos $\mathcal{X}$ a la circunferencia que pasa por los tres vértices de ABC. La paralela a la bisectriz del ángulo $\angle ACB$ por A corta a la recta BC en D y a $\mathcal{X}$ en E. Si $BD = 8$ unidades, calcula la medida del segmento BE.

Problema 3.
Alrededor de una mesa redonda se encuentran sentadas n personas, a quienes se les reparten $2n$ tarjetas (numeradas del 1 al $2n$) de manera que una persona tiene las tarjetas (1,2), la persona a su derecha las tarjetas (3,4), a la derecha quedan (5,6), etc.

De manera simultánea, cada persona toma la tarjeta con el número menor (de las dos que tiene) y la pasa a quien esté sentado a su derecha. Este paso se repite una infinidad de veces.

(a) Demuestre que a partir de cierto momento, hay n tarjetas que ya no se mueven.

(b) ¿Cuántos pasos son necesarios para alcanzar el momento mencionado en el inciso a)?